62. Državno natjecanje iz matematike
Hrvatska, 11. svibnja 2021.

Ove godine, 11. svibnja 2021., održano je Državno natjecanje iz matematike online za učenike srednjih škola, A varijante i B varijante. Školsko natjecanje je održano 17. veljače, a Županijsko 29. ožujka. Zadatke je priređivalo Državno povjerenstvo koje se sastoji od tri potpovjerenstva: za osnovne škole, srednje škole A varijante i srednje škole B varijante.

Za srednje je škole podijeljeno 6 prvih, 8 drugih, 15 trećih nagrada i 21 pohvala za A varijantu, te 8 prvih, 7 drugih, 7 trećih nagrada i 16 pohvala za B varijantu.

Nagrade i pohvale učenika srednjih škola

A varijanta

I. razred

Barbara Kelava, Prva gimnazija Varaždin, Varaždin (I. nagrada); *Lara Semeš*, XV. gimnazija, Zagreb (II. nagrada); *Petra Grubišić*, Gimnazija Antuna Vrančića, Šibenik, *Tin Salopek*, XV. gimnazija, Zagreb, *Marija Dora Marodi*, Gimnazija Josipa Slavenskog, Čakovec, Čakovec, *Lucija Pongrac*, XV. gimnazija, Zagreb, *Luka Protulipac*, XV. gimnazija, Zagreb, *Ratko Jelavić*, III. gimnazija, Split (III. nagrada); *Tena Radoš*, XV. gimnazija, Zagreb, *Vid Šarić*, Gimnazija Pula, Pula, *Mihovil Petrić*, XV. gimnazija, Zagreb, *Adrian Grbac Lacković*, XV. gimnazija, Zagreb, *David Lang*, XV. gimnazija, Zagreb (pohvala).

II. razred

Namik Agić, XV. gimnazija, Zagreb (I. nagrada); *Borna Banjanin*, XV. gimnazija, Zagreb, *Emanuel Tukač*, Prva gimnazija Varaždin, Varaždin (II. nagrada); *Janko Bušelić*, XV. gimnazija, Zagreb, *Stella Čolo*, Gimnazija Franje Petrića, Zadar, *Jagor Tambača*, XV. gimnazija, Zagreb, *Lovre Pazinović*, III. gimnazija, Split (III. nagrada); *Samuel Bae*, XV. gimnazija, Zagreb, *Vedran Ivanković*, Gimnazija Matije Antuna Reljkovića, Vinkovci, *Matej Cvitković*, III. gimnazija, Split, *Fran Babić*, XV. gimnazija, Zagreb, *Ivan Janjić*, XV. gimnazija, Zadreb, *Dan Erceg*, III. gimnazija, Split (pohvala).

III. razred

Bernard Inkret, XV. gimnazija, Zagreb (I. nagrada); *Vanja Vukmanović*, XV. gimnazija, Zagreb, *Šimun Dropuljić*, XV. gimnazija, Zagreb, *Petar Sruk*, XV. gimnazija, Zagreb (II. nagrada); *Luka Passek-Kumerički*, XV. gimnazija, Zagreb, *Dorijan Lendvaj*, XV. gimnazija, Zagreb, *Bartol Bućan*, III. gimnazija, Split (III. nagrada); *Patrick Pavić*, XV. gimnazija, Zagreb, *Leonarda Vuković*, III. gimnazija Osijek, Osijek, *Matej Vojvodić*, Gimnazija Lucijana Vranjanina, Zagreb, *Ivan Premuš*, Gimnazija Josipa Slavanskog Čakovec, Čakovec (pohvala).

IV. razred

Krešimir Nežmah, XV. gimnazija, Zagreb, *Ivan Vojvodić*, XV. gimnazija, Zagreb, *Andrej Čizmarević*, Gimnazija Andreja Mohorovičića, Rijeka (I. nagrada); *Jakov Ljubičić*, Gimnazija Lucijana Vranjanina, Zagreb, *Gabrijel Radovčić*, XV. gimnazija, Zagreb (II. nagrada); *Ema Borevković*, XV. gimnazija, Zagreb, *Lovro Vladić*, XV.

gimnazija, Zagreb (III. nagrada); *Niko Perica*, Gimnazija Antuna Vrančića, Šibenik, *Gašpar Haramija*, Prva gimnazija Varaždin, Varaždin, *Lukas Baltas*, Gimnazija Lucijana Vranjanina, Zagreb, *Leonarda Pribanić*, Gimnazija Lucijana Vranjanina, Zagreb, *Vedran Cifrek*, XV. gimnazija, Zagreb, *Jakov Tušek*, XV. gimnazija, Zagreb (pohvala).

B varijanta

I. razred

Bernard Pribanić, 1. Tehnička škola Nikole Tesle, Zagreb, *Sonja Rajko*, Srednja škola Mate Balote, Poreč (I. nagrada); *Feđa Mitić*, Tehnička škola Ruđera Boškovića, Zagreb, *Danijel Pilaj*, Gimnazija Josipa Slavenskog Čakovec, Čakovec, *Petra đurić*, Srednja škola fra Andrije Kačića Miošića, Makarska, *Karlo Levanić*, GPRŠ Varaždin, Varaždin (II. nagrada); *Nediljko Marijanović*, V. gimnazija Vladimira Nazora, Split (III. nagrada); *Matija Krivec*, Gimnazija Sesvete, Zagreb, *Rene Blažeković*, XVI. gimnazija, Zagreb, *Petra Gudasić*, Gimnazija Sesvete, Zagreb, *Antun Kasalo*, Gimnazija Sesvete, Zagreb (pohvala).

II. razred

Simeon Stefanović, Srednja škola za elektrotehniku i računalstvo, Rijeka (I. nagrada); *Viktor Delač*, Prirodoslovna škola Vladimira Preloga, Zagreb (II. nagrada); *Mateo Mitrović*, Srednja škola Biograd na Moru, Biograd na Moru, *Dora Gašparić*, Gimnaija Josipa Slavenskog Čakovec, Čakovec (III. nagrada); *Lea Meštrović*, Prirodoslovna škola Vladimira Preloga, Zagreb, *Lucija Stipetić*, Gimnazija i strukovna škola Berdnardina Frankopana, Ogulin, *Noa Sorić*, Gimnazija Vladimira Nazora, Zadar, *Vinko Jakuš*, Elektrostrojarska škola, Varaždin, *Ela Benić*, Gimnazija Dubrovnik, Dubrovnik (pohvala).

III. razred

Andrija Petrušić, Elektrotehnička škola, Split, *Nikola Bačić*, Srednja škola Blato, Blato, *Marko Dvorski*, Elektrostrojarska škola, Varaždin (I. nagrada); *Ivona Bosec*, Srednja škola Marka Marulića, Slatina (II. nagrada); *Roko Bruno Donkov*, Tehnička škola Ruđera Boškovića, Zagreb, *Marko Pekas*, Tehnička škola Ruđera Boškovića, Zagreb (III. nagrada); *Josip Rončević*, Srednja škola Petra Šegedina, Korčula, *Dino Mandra*, Gimnazija Jurja Barakovića, Zadar (pohvala).

IV. razred

Josip Matanić, Prirodoslovna škola Vladimira Preloga, Zagreb, *Sebastijan Tukač*, Elektrostrojarska škola, Varaždin (I. nagrada); *Luka Rogoz*, Gimnazija dr. Ivana Kranjčeva, đurđevac (II. nagrada); *Leon Križanić*, Srednja škola Petrinja, Petrinja, *Klara Jurić*, Gimnazija Antuna Vrančića, Šibenik (III. nagrada); *Sanel Prtenjača Jedrejčić*, PGSRI, Rijeka, *Petar Dundara*, Labin, Labin, *Karla Mijić*, Srednja škola Mate Balote, Poreč, *Paula Bočkaj*, Prirodoslovna škola Vladimira Preloga, Zagreb, *Jan Lihtar*, Gimnazija Antuna Gustava Matoša, Zabok (pohvala).

Zadatci s Državnog natjecanja – A varijanta

I. razred

1. Odredi sve trojke (x, y, z) realnih brojeva za koje vrijedi

$$x^2 - y = z^2,$$
$$y^2 - z = x^2,$$
$$z^2 - x = y^2.$$

2. Dokaži da ne postoje prirodni brojevi a i b koji zadovoljavaju jednakost
$$3^a - 2^b = 2021.$$

3. U trapezu $ABCD$ zbroj duljina osnovica $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ jednak je duljini kraka $\overline{AD}$. Pravac paralelan osnovicama kroz sjecište dijagonala siječe krak $\overline{AD}$ u točki E. Dokaži da je $\sphericalangle BEC = 90°$.

4. Neka su a, b i c realni brojevi koji zadovoljavaju jednakost
$$|a+b| + |a+c| + |b+c| = 8.$$
Odredi najveću i najmanju moguću vrijednost izraza
$$a^2 + b^2 + c^2$$
te odredi kada se ona postiže.

5. U nekom jeziku svaka je riječ niz slova a i b. Svaka riječ ima barem jedno i najviše 13 slova, no nisu svi takvi nizovi riječi. Poznato je da nadovezivanjem jedne riječi na drugu nikad ne dobivamo riječ. Odredi najveći mogući broj riječi u tom jeziku.

II. razred

1. Odredi sve parove (x, y) realnih brojeva za koje vrijedi
$$x + \frac{1}{y-x} = 1 \qquad \text{i} \qquad y + \frac{1}{x-y} = 2.$$

2. Neka je (a, b, c) trojka prirodnih brojeva za koje vrijedi $a^2 + b^2 = c^2$. Dokaži da broj $\left(\frac{c}{a} + \frac{c}{b}\right)^2$ nije prirodan te da je veći od 8.

3. Neka je ABC trokut takav da je $|AB| < |BC|$ i $\sphericalangle BAC = 45°$. Tangente na kružnicu opisanu tom trokutu u točkama B i C sijeku se u točki D. Pravci AC i BD se sijeku u točki E te vrijedi $|EA| = 3$ i $|AC| = 8$. Odredi površinu trokuta CDE.

4. Odredi sve trojke prirodnih brojeva (a, b, c) za koje vrijedi
$$2^a \cdot 5^b - 1 = 11 \cdot 3^c.$$

5. Teta u vrtiću nadgleda igru n djece koja sjede raspoređena ukrug. Svako dijete ima određeni broj bombona. Igra se sastoji od niza ovakvih *koraka*:
Svakom djetetu koje ima neparan broj bombona teta daje po još jedan bombon te svako dijete podijeli svoje bombone na dvije jednake hrpe. Zatim, u istom trenutku, svako dijete daje polovinu svojih bombona djetetu koje sjedi neposredno desno od njega.
Dokaži da će nakon konačno mnogo koraka sva djeca imati jednak broj bombona.

III. razred

1. Odredi sve prirodne brojeve n među čijim djeliteljima postoje djelitelji a i b takvi da je
$$a + b = n - 1.$$

2. Neka je $\alpha = \dfrac{2\pi}{2021}$. Izračunaj
$$\cos\alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \ldots \cdot \cos 1010\alpha.$$

3. Na kraćem luku $\overset{\frown}{CD}$ kružnice opisane kvadratu $ABCD$ nalazi se točka M. Neka su P i Q redom sjecišta pravca AM s $\overline{BD}$ i $\overline{CD}$ te neka su R i S redom sjecišta pravca BM s $\overline{AC}$ i $\overline{CD}$. Dokaži da su dužine $\overline{PS}$ i $\overline{QR}$ međusobno okomite.

4. Zapisan je niz od n realnih brojeva među kojima je barem jedan pozitivan. Od članova tog niza označeni su
a) svi pozitivni brojevi te
b) svi brojevi kojima započinje neki niz uzastopnih članova tog niza pozitivnog zbroja.
Dokaži da je zbroj svih označenih brojeva pozitivan.

5. U raznostraničnom trokutu ABC duljine dviju visina jednake su duljinama dviju težišnica. Koliki je omjer duljina preostale visine i preostale težišnice?

IV. razred

1. Neka je (x_n) niz takav da je $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, sa svojstvom da je niz (y_n) zadan relacijom
$$y_n = \binom{n}{0}x_0 + \binom{n}{1}x_1 + \ldots + \binom{n}{n}x_n, \quad \text{za} \quad n \in \mathbb{N}_0$$
geometrijski niz. Odredi x_{2020}.

2. Neka je $n \geq 2$ prirodan broj te neka je $(p_1, \ldots, p_n)$ neka permutacija skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$. Pokaži da vrijedi
$$\frac{1}{p_1 + p_2} + \frac{1}{p_2 + p_3} + \ldots + \frac{1}{p_k + p_{k+1}} + \ldots + \frac{1}{p_{n-1} + p_n} > \frac{n-1}{n+2}.$$

3. Odredi sve trojke prirodnih brojeva (a, b, c) za koje vrijedi
$$2^a + 2021 = 3^b \cdot 25^c.$$

4. Dana je ploča dimenzija $n \times n$ i po jedna pločica dimenzija 1×1, 1×2, $\ldots$, $1 \times n$. Na koliko načina je moguće odabrati $\frac{1}{2}n(n+1)$ polja ploče tako da odabrani dio bude moguće prekriti horizontalno postavljenim pločicama, ali također i vertikalno postavljenim pločicama?

5. Dan je trokut ABC čije je središte upisane kružnice točka I. Odabrane su dvije točke, točka D na luku $\overset{\frown}{AB}$ opisane kružnice trokuta ABC koji ne sadrži točku C, te točka E na dužini $\overline{BC}$, tako da vrijedi $\sphericalangle ADI = \sphericalangle IEC$. Dokaži da postoji točka, neovisna o odabiru točaka D i E, kojom pravac DE prolazi.

Zadatci s Državnog natjecanja – B varijanta

I. razred

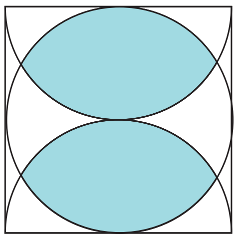
1. Odredite sve prirodne brojeve x, y, z za koje vrijedi
$$4x^2 + 45y^2 + 9z^2 - 12xy - 36yz = 25,$$
pri čemu je $x < y < z$.

2. Ivo, Alen, Vanja, Marko i Saša su kuhari u hotelu. Alen i Marko zaduženi su za kuhanje doručka i ručka, Ivo i Vanja rade na pripremi ručka i večere, dok je Saša na raspolaganju za sva tri obroka. Na koliko je načina moguće napraviti njihov dnevni raspored kuhanja, ako svaki obrok pripremaju točno dva kuhara, a kuhar ako radi, mora biti raspoređen na točno dva obroka? Može li uz takav dnevni raspored svaki kuhar imati barem jedan slobodan dan u tjednu? Obrazložite.

3. Dužina $\overline{AB}$ je hipotenuza pravokutnog trokuta ABC. Visina iz vrha C, s nožištem u točki D, odsijeca na hipotenuzi odsječak $\overline{DB}$ duljine 16. Odredite površinu trokuta ABC, ako je $|AC| = 15$?
4. Fran je odlučio obojiti ogradu uz pomoć prijatelja Tina i Luke. Procijenili su da bi za bojenje ograde Tinu samome trebalo 3 sata više nego Franu, a Luki samome 2 sata manje nego Franu. Radeći sva trojica zajedno, svatko svojim tempom, ogradu bi obojili za 4 sata. Koliko bi sati trebalo svakom od njih da samostalno oboji ogradu?
5. Dokažite da među bilo kojih 2021 prirodnih brojeva od kojih nijedan nije djeljiv s 2021 postoji nekoliko brojeva čiji je zbroj djeljiv s 2021.

II. razred

1. U kvadrat je upisana kružnica i dvije polukružnice kao što je prikazano na slici. Kolika je površina kvadrata ako je površina osjenčanog dijela jednaka $48\pi - 36\sqrt{3}$?



2. Pravokutan trokut kojemu je hipotenuza trostruko dulja od jedne katete rotira oko hipotenuze. Odredite omjer obujma tako nastalog tijela i obujma tom tijelu opisane kugle.
3. Odredite sva cjelobrojna rješenja sustava jednadžbi
$$x^2 - y^2 - z^2 = 18,$$
$$3x^2 - 2y^2 - 4z^2 = 134.$$
4. Dvojica su gusara na pustom otoku pronašla sanduk u kojemu su bili zlatni lančići, narukvice i prsteni. Započeli su raspravu o tome kako će međusobno podijeliti lančiće, narukvice i prstene. Zaključili su da će na raspravu potrošiti ukupno 5865 minuta ako o svakoj mogućoj raspodjeli raspravljaju po 5 minuta. Odredite koliko je u sanduku bilo lančića, koliko narukvica i koliko prstena ako se zna da je najviše bilo prstena, a najmanje narukvica. Svi su lančići međusobno jednaki, a isto vrijedi za narukvice i prstene.
5. Odredite minimalnu vrijednost funkcije $f : \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\} \to \mathbb{R}$,
$$f(x) = \frac{12x^2 + 8x + 4}{(2x+1)^2}.$$
Za koji x funkcija f postiže minimum?

III. razred

1. Odredite umnožak svih rješenja jednadžbe
$$\sqrt{2021}\, x^{\log_{2021} x} = x^2.$$
2. Tenisač Duje je na početku zemljane turneje imao 50 % pobjeda. Nakon prvog odigranog turnira na zemlji na kojem je imao tri pobjede i jedan poraz, udio

pobjeda mu je bio veći od $52\ \%$. Nakon drugog odigranog turnira na zemlji na kojem je imao četiri pobjede i jedan poraz, udio pobjeda mu je bio manji od $56\ \%$. Koliko je mečeva Duje odigrao do zemljane turneje ako znamo da je do kraja sezone odigrao dvostruko više mečeva nego prije zemljane turneje i da je pobijedio u $60\ \%$ mečeva?

3. Odredite cjelobrojna rješenja nejednadžbe

$$\frac{x^2-16x+39}{\operatorname{tg}^2\frac{\pi x}{4}-1} \geq 0.$$

4. U trokutu ABC točka D je na stranici $\overline{AB}$, a točka E na stranici $\overline{BC}$ tako da vrijedi $|AD|:|DB|=|CE|:|EB|=3:4$. Dužine $\overline{AE}$ i $\overline{CD}$ sijeku se u točki P. Vektor $\overrightarrow{AP}$ izrazite kao linearnu kombinaciju vektora $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$.

5. U kuglu polumjera R upisana je pravilna uspravna četverostrana piramida s vrhom V i osnovkom $ABCD$. Neka je $\cos\sphericalangle AVB=\frac{3}{4}$. Kolika je visina piramide izražena s pomoću R?

IV. razred

1. Prvi red kazališta ima 15 sjedala, a svaki sljedeći red ima dva sjedala više. Ukupan broj sjedala u kazalištu je kvadrat nekog prirodnog broja. Koliko ima redova u tom kazalištu?

2. Riješite sustav jednadžbi:

$$\begin{aligned}&\log_3|\pi x|+2\log_{|\pi x|}3=3,\\&\sin^2(x+y)+1=2\sin(x+y).\end{aligned}$$

3. Točke A_1, B_1, C_1 su redom na stranicama $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ trokuta ABC takve da vrijedi:

$$\frac{|BA_1|}{|BC|}=\frac{|CB_1|}{|CA|}=\frac{|AC_1|}{|AB|}=k.$$

Odredite k tako da površina trokuta $A_1B_1C_1$ bude najmanja moguća.

4. Odredite sve polinome p s realnim koeficijentima za koje je jednakost

$$x\cdot p(x-1)=(x-2021)\cdot p(x)$$

ispunjena za sve realne brojeve x.

5. Andro i Borna naizmjence bacaju simetričnu kocku čije su stranice označene brojevima 1, 2, 3, 4, 5 i 6. Pobjednik je onaj koji prvi dobije šesticu. Ako Andro počinje igru, kolika je vjerojatnost da Borna pobijedi?

Matija Bašić

10. Europska matematička olimpijada za djevojke, 2021.

Ove godine su učenice srednjih škola u Hrvatskoj po drugi puta sudjelovale na Europskoj matematičkoj olimpijadi za djevojke. Na temelju rezultata Državnog natjecanja iz matematike održanog na daljinu 26. listopada 2020., Povjerenstvo Hrvatskog matematičkog društva za međunarodna matematička natjecanja odredilo je da se na *2. Hrvatsku matematičku olimpijadu za djevojke (HMOD)* pozove njih 14. Natjecanje je održano 27. veljače 2021. na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakultetu u Zagrebu.

Najuspješnije učenice su bile:

Ema Borevković, XV. gimnazija, Zagreb

Stella Čolo, Gimnazija Franje Petrića, Zadar

Leonarda Pribanić, Gimnazija Lucijana Vranjanina, Zagreb

Lara Semeš, XV. gimnazija, Zagreb

i one su predstavljale Republiku Hrvatsku na 10. Europskoj matematičkoj olimpijadi za djevojke (EGMO). Samo natjecanje je organizirala Gruzija, a zbog epidemiološke situacije COVID-19 održavalo se online 11. i 12. travnja 2021.

Na ovoj Europskoj matematičkoj olimpijadi za djevojke sudjelovalo je ukupno 213 djevojaka iz 55 država, od čega u službenoj konkurenciji njih 144 iz 37 država. Od naših djevojaka na ovom natjecanju, *Ema Borevković* je osvojila srebrnu, a *Stella Čolo* brončanu medalju. Pregled svih rezultata može se vidjeti na adresi:

`https://www.egmo.org/registration/2021/person?@template=scoreboard`

S učenicama su, osim njihovih mentora u školi, u okviru službenih priprema, radili Nikola Adžaga, Matija Bašić, Josip Pupić, Vedran Stipetić i Azra Tafro.

Matija Bašić

Zadatci

Prvi dan, nedjelja, 11. travnja 2021.

Zadatak 1. Broj 2021 je *fantastičan*. Za bilo koji prirodan broj m, ako je bilo koji element skupa $\{m, 2m+1, 3m\}$ fantastičan, onda su svi elementi fantastični. Slijedi li iz toga da je broj 2021^{2021} fantastičan?

Zadatak 2. Odredi sve funkcije $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ takve da jednakost

$$f(xf(x)+y) = f(x) + x^2$$

vrijedi za sve racionalne brojeve x i y.

Ovdje $\mathbb{Q}$ označava skup svih racionalnih brojeva.

Zadatak 3. Neka je ABC trokut s tupim kutom u vrhu A. Neka su E i F sjecišta vanjske simetrale kuta u vrhu A s visinama trokuta ABC iz vrhova B i C redom. Neka su M i N redom točke na dužinama $\overline{EC}$ i $\overline{FB}$ takve da je $\sphericalangle EMA = \sphericalangle BCA$ i $\sphericalangle ANF = \sphericalangle ABC$. Dokaži da točke E, F, N i M leže na istoj kružnici.

Drugi dan, ponedjeljak, 12. travnja 2021.

Zadatak 4. Neka je ABC trokut sa središtem upisane kružnice I i neka je D bilo koja točka na stranici $\overline{BC}$. Neka pravac kroz D okomit na BI siječe pravac CI u točki E. Neka pravac kroz D okomit na CI siječe pravac BI u točki F. Dokaži da točka osnosimetrična točki A u odnosu na pravac EF leži na pravcu BC.

Zadatak 5. U ravnini je posebna točka O koju zovemo ishodište. Neka je P skup od 2021 točke u toj ravnini sa svojstvom da

(i) nikoje tri točke iz P ne leže na istom pravcu i

(ii) nikoje dvije točke iz P ne leže na pravcu koji prolazi kroz ishodište.

Trokut s vrhovima iz P je *debeo* ako je O u unutrašnjosti trokuta. Odredi najveći mogući broj debelih trokuta.

Zadatak 6. Postoji li nenegativan cijeli broj a za koji jednadžba

$$\left\lfloor\frac{m}{1}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{m}{3}\right\rfloor+\ldots+\left\lfloor\frac{m}{m}\right\rfloor=n^2+a$$

ima više od milijun različitih rješenja (m,n) gdje su m i n prirodni brojevi?

Izraz $\lfloor x\rfloor$ *označava cjelobrojni do (najveće cijelo) realnog broja* x. *Dakle,* $\left\lfloor\sqrt{2}\right\rfloor=1$, $\lfloor\pi\rfloor=\lfloor 22\ /\ 7\rfloor=3$, $\lfloor 42\rfloor=42$ *i* $\lfloor 0\rfloor=0$.

Dokaz Pitagorinog poučka pomoću derivacije

Petar Svirčević[1]

Pitagorin poučak je vjerojatno jedan od najpoznatijih poučaka, kojeg su poznavali i *stari Sumerani*. Nije on samo tako davno iskazan, već je i dokazan. Opće je poznato, da je *Euklid* taj poučak s dokazom naveo u svojim *Elementima*. O poučku je napisana nebrojena literatura, pa se time ovdje nećemo baviti, ali ćemo navesti kratke napomene, koje su vezane za ovaj prilog.

Početkom prošlog stoljeća, matematičar *E. S. Loomis* je izdao djelo *The Pythagorean Proposition* u kojem je naveo 367 dokaza *Pitagorinog poučka*. Slike su u toj knjizi dosta grube, iako su dokazi korektni. Recimo i to, da je NCTM (*National Council of Teachers of Mathematics*) 1968. g. objavio to djelo u dotjeranoj verziji. Nadalje, *W. Dunham* objavljuje 1978. g. djelo *Mathematical Universe* i u predgovoru tvrdi, da je broj algebarskih dokaza tog poučka vrlo velik, isto kao i broj geometrijskih dokaza, ali da ne postoji trigonometrijski dokaz. No, *Nuno Luzia* daje dva trigonometrijska dokaza ovog poučka, koji su navedeni u [2]. Svakako, to ne znači da ne postoji još dokaza te vrste, pa je time negirana heuristička tvrdnja, koju je iskazao *W. Dunham*.

Nakon ovih kratkih povijesnih napomena o *Pitagorinom poučku*, izvest ćemo sada njegov dokaz koristeći derivaciju.

[1] Autor je profesor u mirovini na Tehničkoj školi Zagreb; e-pošta: `petar.svircevic@zg.t-com.hr`